Programmbeweise mit Z

Andreas Zeller

Lehrstuhl Softwaretechnik
Universität des Saarlandes, Saarbrücken







Das Schema-Kalkül

Z besteht aus zwei Sprachen: der Sprache der gewöhnlichen Mathematik und der *Schema-Sprache.*

Schemata sind *das* charakteristische Merkmal von Z!

Sie ermöglichen

- Makro-ähnliches Einschließen und Wiederverwenden von Definitionen
- inkrementelle Spezifikation
- Spezifikation als Mischung aus Text und formalen Definitionen







Zustands-Schemata einschließen

Editor

$left, right : TEXT$

$\#(left \frown right) \leq maxsize$

Init

$Editor$?

$left = right = \langle\,\rangle$







Zustands-Schemata einschließen

Editor

$left, right : TEXT$

$\#(left \frown right) \leq maxsize$

Init

$Editor$?

$left = right = \langle\,\rangle$

bedeutet tatsächlich

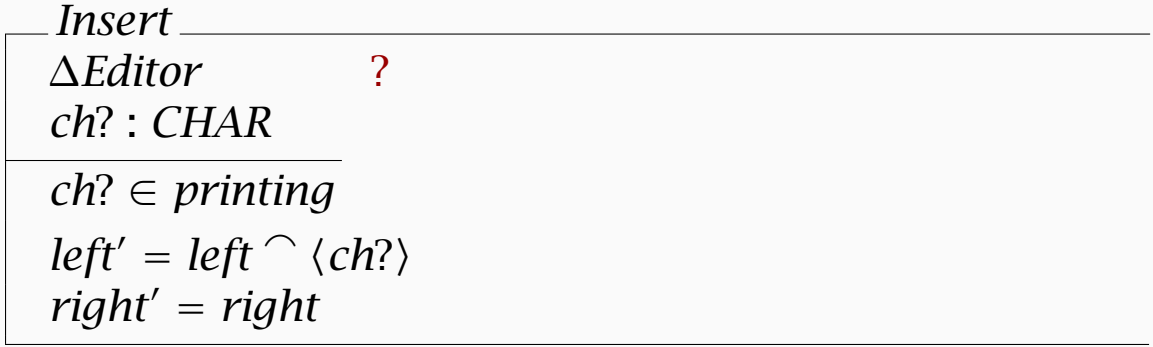
Init

$left, right : TEXT$

$\#(left \frown right) \leq maxsize$

$left = right = \langle\,\rangle$

Operations-Schemata einschließen



Was bedeutet hier $\Delta Editor$?

Operations-Schemata einschließen (2)

Wir können Schema-Namen mit weiteren Zeichen (wie $'$) versehen. Dies wirkt sich auf alle im Schema definierten Variablen aus:

Editor

$$left, right : TEXT$$

$$\#(left \frown right) \leq maxsize$$

Editor′

Operations-Schemata einschließen (2)

Wir können Schema-Namen mit weiteren Zeichen (wie $'$) versehen. Dies wirkt sich auf alle im Schema definierten Variablen aus:

Editor

$$left, right : TEXT$$

$$\#(left \frown right) \leq maxsize$$

Editor′

$$left', right' : TEXT$$

$$\#(left' \frown right') \leq maxsize$$

Operations-Schemata einschließen (3)

ΔS ist für alle Schemata definiert als:

$$\Delta S$$
$$S$$
$$S'$$

Expandieren wir $\Delta Editor$, so erhalten wir

$$\Delta Editor$$
$$left, right : TEXT$$
$$left', right' : TEXT$$
$$\#(left \frown right) \leq maxsize$$
$$\#(left' \frown right') \leq maxsize$$

Operations-Schemata einschließen (4)

Somit expandiert das *Insert*-Schema zu

$$
\begin{array}{|l}
\textit{Insert} \\
\hline
left, right, left', right' : TEXT \\
ch? : CHAR \\
\hline
ch? \in printing \\
\#(left \frown right) \leq maxsize \\
\#(left' \frown right') \leq maxsize \\
left' = left \frown \langle ch? \rangle \\
right' = right \\
\hline
\end{array}
$$







Operations-Schemata einschließen (5)

Ξ ist eine weitere Abkürzung – der Name des Schemata, bei dem sich nichts verändert:

$\Xi Editor$

$\Delta Editor$

$left' = left$

$right' = right$

Expandiert:

$\Xi Editor$

$left, right, left', right' : TEXT$

$\#(left \frown right) \leq maxsize$

$\#(left' \frown right') \leq maxsize$

$left' = left$

$right' = right$

Schema-Operatoren

Quotient

$n, d, q, r : \mathbb{Z}$

$d \neq 0$

$n = q * d + r$

Remainder

$r, d : \mathbb{Z}$

$r < d$

Was ist

$$Division \mathrel{\widehat{=}} Quotient \wedge Remainder \quad ?$$

Schema-Operatoren: Konjunktion

Quotient

$n, d, q, r : \mathbb{Z}$

$d \neq 0$

$n = q * d + r$

Remainder

$r, d : \mathbb{Z}$

$r < d$

Division$(\widehat{=}\ \mathit{Quotient} \wedge \mathit{Remainder})$

$n, d, q, r : \mathbb{Z}$

$d \neq 0$

$n = q * d + r$

$r < d$

Schema-Operatoren: Übersicht

Bei der Schema-Konjunktion werden

- alle Deklarationen vereinigt
- alle Prädikate in einer *Konjunktion* zusammengefaßt.

Analog – *Disjunktion*: Hier werden

- alle Deklarationen vereinigt
- alle Prädikate in einer *Disjunktion* zusammengefaßt.







Schema-Operatoren: Disjunktion

DivideByZero

$$d, q, r : \mathbb{Z}$$

$$d = 0 \land q = 0 \land r = 0$$

$$T\_Division \mathrel{\widehat{=}} Division \lor DivideByZero$$







Schema-Operatoren: Disjunktion

DivideByZero

$$d, q, r : \mathbb{Z}$$

$$d = 0 \land q = 0 \land r = 0$$

$$T\_Division \mathrel{\widehat{=}} Division \lor DivideByZero$$

ergibt

T_Division

$$n, d, q, r : \mathbb{Z}$$

$$(d \neq 0 \land r < d \land n = q * d + r) \lor$$
$$(d = 0 \land r = 0 \land q = 0)$$

Schema-Operatoren: Negation

Die Negation eines Schemata ist nicht sehr nützlich.
Wir betrachten das expandierte EOF-Schema:

$$
\begin{array}{|l}
\hline
EOF \\
left, right : TEXT \\
\hline
\#(left \frown right) \leq maxsize \\
right = \langle\,\rangle \\
\hline
\end{array}
$$







Schema-Operatoren: Negation

Die Negation eines Schemata ist nicht sehr nützlich.
Wir betrachten das expandierte EOF-Schema:

$$
\begin{array}{|l}
\hline
EOF \\
left, right : TEXT \\
\hline
\#(left \frown right) \leq maxsize \\
right = \langle\,\rangle \\
\hline
\end{array}
$$

$\neg\, EOF$ ergibt

$$
\begin{array}{|l}
\hline
\neg\, EOF \\
left, right : TEXT \\
\hline
left \notin \operatorname{seq} CHAR \lor \\
right \notin \operatorname{seq} CHAR \lor \\
\#(left \frown right) > maxsize \lor \\
right \neq \langle\,\rangle \\
\hline
\end{array}
$$

Schema-Operatoren: Negation (2)

Besser: Ein Schema, das gezielt Prädikate negiert

Aus

$$\begin{array}{|l}\hline EOF \\ Editor \\ \hline right = \langle\,\rangle \\ \hline\end{array}$$

wird so

$$\begin{array}{|l}\hline NotEOF \\ Editor \\ \hline right \neq \langle\,\rangle \\ \hline\end{array}$$

Fallstudie: Textverarbeitung

Aufgabe: Text in Wörter aufteilen

$$words\langle H, o, w, , a, r, e, , y, o, u\rangle = \langle\langle H, o, w\rangle, \langle a, r, e\rangle, \langle y, o, u\rangle\rangle$$

Fallstudie: Textverarbeitung

Aufgabe: Text in Wörter aufteilen

$$words\langle H, o, w, , a, r, e, , y, o, u\rangle = \langle\langle H, o, w\rangle, \langle a, r, e\rangle, \langle y, o, u\rangle\rangle$$

Wir definieren die Grundtypen:

$$[CHAR]$$

$$blank : \mathbb{P}\, CHAR$$

$$TEXT == \operatorname{seq} CHAR$$
$$SPACE == \operatorname{seq}_1 blank$$
$$WORD == \operatorname{seq}_1 (CHAR \setminus blank)$$

Fallstudie: Textverarbeitung (2)

So sieht die Definition von *words* aus:

$$words : TEXT \rightarrow \operatorname{seq} WORD$$

$$\forall\, s : SPACE;\ w : WORD;\ l, r : TEXT \bullet words(\langle\, w \,\rangle) = \langle\, w \,\rangle$$







Fallstudie: Textverarbeitung (2)

So sieht die Definition von *words* aus:

$$words : TEXT \rightarrow \operatorname{seq} WORD$$

$$\begin{aligned}
&\forall\, s : SPACE;\ w : WORD;\ l, r : TEXT \bullet \\
&\quad words(\langle\,\rangle) = \langle\,\rangle \land \\
&\quad words(s) = \langle\,\rangle
\end{aligned}$$

Fallstudie: Textverarbeitung (2)

So sieht die Definition von *words* aus:

$$words : TEXT \rightarrow \operatorname{seq} WORD$$

$$\begin{aligned}
&\forall\, s : SPACE;\ w : WORD;\ l, r : TEXT \bullet \\
&\quad words(\langle\,\rangle) = \langle\,\rangle \land \\
&\quad words(s) = \langle\,\rangle \land \\
&\quad words(w) = \langle w \rangle
\end{aligned}$$







Fallstudie: Textverarbeitung (2)

So sieht die Definition von *words* aus:

$$words : TEXT \rightarrow \operatorname{seq} WORD$$

$$\begin{aligned}
&\forall\, s : SPACE;\ w : WORD;\ l, r : TEXT \bullet \\
&\quad words(\langle\,\rangle) = \langle\,\rangle \land \\
&\quad words(s) = \langle\,\rangle \land \\
&\quad words(w) = \langle w \rangle \land \\
&\quad words(s \frown r) = words(r)
\end{aligned}$$

Fallstudie: Textverarbeitung (2)

So sieht die Definition von *words* aus:

$$words : TEXT \rightarrow \operatorname{seq} WORD$$

$$\begin{aligned}
&\forall\, s : SPACE;\ w : WORD;\ l, r : TEXT \bullet \\
&\quad words(\langle\,\rangle) = \langle\,\rangle \land \\
&\quad words(s) = \langle\,\rangle \land \\
&\quad words(w) = \langle w \rangle \land \\
&\quad words(s \frown r) = words(r) \land \\
&\quad words(l \frown s) = words(l)
\end{aligned}$$







Fallstudie: Textverarbeitung (2)

So sieht die Definition von *words* aus:

$$words : TEXT \rightarrow \operatorname{seq} WORD$$

$$\begin{aligned}
&\forall\, s : SPACE;\ w : WORD;\ l, r : TEXT \bullet \\
&\quad words(\langle\,\rangle) = \langle\,\rangle \land \\
&\quad words(s) = \langle\,\rangle \land \\
&\quad words(w) = \langle w \rangle \land \\
&\quad words(s \frown r) = words(r) \land \\
&\quad words(l \frown s) = words(l) \land \\
&\quad words(l \frown s \frown r) = words(l) \frown words(r)
\end{aligned}$$

Fallstudie: Textverarbeitung (3)

Wir möchten gerne die Anzahl der Zeilen und Wörter zählen – analog zum wc-Werkzeug in UNIX:

```
$ wc zed.tex
1060    2750   22413 zed.tex
$ _
```







Fallstudie: Textverarbeitung (3)

Wir möchten gerne die Anzahl der Zeilen und Wörter zählen – analog zum wc-Werkzeug in UNIX:

```
$ wc zed.tex
1060     2750    22413 zed.tex
$ _
```

Das ist nun nicht sehr schwierig:

$$wc : TEXT \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$\forall\, file : TEXT \bullet$$
$$wc(file) = (\#lines(file), \#words(file), \#file)$$

Übung: Definieren Sie *lines*!

Fallstudie: Textverarbeitung (4)

Noch eine Aufgabe – Absätze auffüllen:

Aus

```
Viele Werkzeuge zur Versionskontrolle arbeiten
mit Sperren:
Zu jeder Zeit darf nur eine Person
das Dokument bearbeiten.
```

soll werden:

```
Viele Werkzeuge zur Versionskontrolle arbeiten mit Sperren:
Zu jeder Zeit darf nur eine Person das Dokument bearbeiten.
```







Fallstudie: Textverarbeitung (5)

$$width : \mathbb{N}$$

Format

$$t, t' : TEXT$$

$$words(t') = words(t)$$

$$\forall\, l : \operatorname{ran} lines(t') \bullet \#l \leq width$$

Fallstudie: Textverarbeitung (5)

$$width : \mathbb{N}$$

Format

$$t, t' : TEXT$$

$$words(t') = words(t)$$
$$\forall\, l : \operatorname{ran} lines(t') \bullet \#l \leq width$$

Fill

$$Format$$

$$\#lines(t') = min\{t' : TEXT \mid Format \bullet \#lines(t')\}$$

Übung: Was bedeutet dieses letzte Schema?

Formales Schließen

Beispiel:

Ein Zug bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 60 km/h. Wie weit kommt der Zug in 4 Stunden?

Als Z-Spezifikation:

$$\begin{array}{|l} distance, velocity, time : \mathbb{N} \\ \hline distance = velocity * time \\ velocity = 60 \\ time = 4 \end{array}$$

Frage: Was ist *distance*?

Beweis

Wir beweisen, daß $distance = 240$ gilt:

$distance = velocity * time$ [Definition]

Beweis

Wir beweisen, daß $distance = 240$ gilt:

$$distance = velocity * time \qquad \text{[Definition]}$$
$$= 60 * time \qquad [velocity = 60]$$

Beweis

Wir beweisen, daß $distance = 240$ gilt:

$$
\begin{aligned}
distance &= velocity * time && \text{[Definition]} \\
&= 60 * time && [velocity = 60] \\
&= 60 * 4 && [time = 4]
\end{aligned}
$$

Beweis

Wir beweisen, daß $distance = 240$ gilt:

$$
\begin{aligned}
distance &= velocity * time && \text{[Definition]} \\
&= 60 * time && [velocity = 60] \\
&= 60 * 4 && [time = 4] \\
&= 240 && \text{[Arithmetik]}
\end{aligned}
$$

Beweis

Wir beweisen, daß $distance = 240$ gilt:

$$
\begin{aligned}
distance &= velocity * time && \text{[Definition]} \\
&= 60 * time && [velocity = 60] \\
&= 60 * 4 && [time = 4] \\
&= 240 && \text{[Arithmetik]}
\end{aligned}
$$

Dies ist ein *strenges Vorgehen:* jeder Schritt wird durch eine Regel begründet.

Beweis

Wir beweisen, daß $distance = 240$ gilt:

$$
\begin{aligned}
distance &= velocity * time && \text{[Definition]} \\
&= 60 * time && [velocity = 60] \\
&= 60 * 4 && [time = 4] \\
&= 240 && \text{[Arithmetik]}
\end{aligned}
$$

Dies ist ein *strenges Vorgehen:* jeder Schritt wird durch eine Regel begründet.

Geht in Z auch kürzer:

$$distance = velocity * time = 60 * time = 60 * 4 = 240$$

Nicht-arithmetisches Schließen

$$\begin{array}{l} philip : PERSON \\ adhesives, materials, research, manufactoring : \mathbb{P}\, PERSON \\ \hline adhesives \subseteq materials \\ materials \subseteq research \\ philip \in adhesives \end{array}$$

Frage: Gilt $philip \in research$?







Nicht-arithmetisches Schließen

$$\frac{\begin{array}{l} philip : PERSON \\ adhesives, materials, research, manufactoring : \mathbb{P}\, PERSON \end{array}}{\begin{array}{l} adhesives \subseteq materials \\ materials \subseteq research \\ philip \in adhesives \end{array}}$$

Frage: Gilt $philip \in research$?

Ja, denn $philip \in adhesives$ [Definition]

$\subseteq materials$ [Definition]

$\subseteq research$ [Definition]

wobei wir aus $S \subseteq T \subseteq U \Rightarrow S \subseteq U$ schließen.







Noch ein Beweis

$$\frac{x : \mathbb{Z}}{2 * x + 7 = 13}$$

Wir schließen auf den Wert von x:

$2 * x + 7 = 13$ [Definition]

$\Leftrightarrow 2 * x = 13 - 7$ [Subtrahiere 7 auf beiden Seiten]

$\Leftrightarrow 2 * x = 6$ [Arithmetik]

Noch ein Beweis

$$\frac{x : \mathbb{Z}}{2 * x + 7 = 13}$$

Wir schließen auf den Wert von x:

$2 * x + 7 = 13$ [Definition]

$\Leftrightarrow 2 * x = 13 - 7$ [Subtrahiere 7 auf beiden Seiten]

$\Leftrightarrow 2 * x = 6$ [Arithmetik]

$\Rightarrow (2 * x) \operatorname{div} 2 = 6 \operatorname{div} 2$ [Teile beide Seiten durch 2]

$\Leftrightarrow x = 6 \operatorname{div} 2$ [Division links; Algebra]

$\Leftrightarrow x = 3$ [Arithmetik]

Spezifikationen prüfen

Inkonsistenz: Spezifikationen, die sich gegenseitig widersprechen

Beispiel: *Existenz des Initial-Zustands*

$$\exists\, Editor \bullet Init$$

„Es gibt einen Editor, der das *Init*-Prädikat erfüllt“

Spezifikationen prüfen

Inkonsistenz: Spezifikationen, die sich gegenseitig widersprechen

Beispiel: *Existenz des Initial-Zustands*

$$\exists\, Editor \bullet Init$$

„Es gibt einen Editor, der das *Init*-Prädikat erfüllt“

Expandiert:

$$\exists\, left, right : TEXT \mid \#(left \frown right) \leq maxsize \bullet \\ left = right = \langle\,\rangle$$

Offensichtlich wahr – aber wie beweist man so etwas formal?







Vorbedingungen berechnen

Die meisten Programme schlagen fehl, weil Programmierer Vorbedingungen nicht beachten:

Insert

$$\Delta Editor$$
$$ch? : CHAR$$

$$ch? \in printing$$
$$left' = left \frown \langle ch? \rangle$$
$$right' = right$$

Gibt es hier irgendwelche nicht-offensichtlichen Vorbedingungen?

Vorbedingungen berechnen (2)

Eine Vorbedingung beschreibt alle Zustände, in denen die Operation definiert ist.

Allgemeine Vorbedingung einer Operation Op auf einem Zustandsschema S ist, daß es ein *Folgeschema* S' gibt:

$$\exists\, S' \bullet Op$$

In unserem Fall:

$$\exists\, Editor' \bullet Insert$$

Oder kurz: Auch nach $Insert$ gibt es immer noch einen $Editor$.

Vorbedingungen berechnen (3)

Editor

$$left, right : TEXT$$

$$\#(left \frown right) \leq maxsize$$

Aus

$$\exists\, Editor' \bullet Insert$$

wird

$$\exists\, left', right' : TEXT \mid \#(left' \frown right') \leq maxsize \bullet$$
$$ch? \in printing \land left' = left \frown \langle ch? \rangle \land right' = right$$

Vorbedingungen berechnen (4)

Wir haben:

$$\exists\, left', right' : TEXT \mid \#(left' \frown right') \leq maxsize \bullet$$
$$ch? \in printing \land left' = left \frown \langle ch? \rangle \land right' = right$$

Vorbedingungen berechnen (4)

Wir haben:

$$\exists\, left', right' : TEXT \mid \#(left' \frown right') \leq maxsize \bullet$$
$$ch? \in printing \land left' = left \frown \langle ch? \rangle \land right' = right$$

Wir führen die Bedingungen des Existenzquantors in den Gültigkeitsbereich.

Generelle Regel – $(\exists\, d \mid p \bullet q) \Leftrightarrow (\exists\, d \bullet p \land q)$:

$$\exists\, left', right' : TEXT \bullet$$
$$ch? \in printing \land \#(left' \frown right') \leq maxsize \land$$
$$left' = left \frown \langle ch? \rangle \land right' = right$$

Vorbedingungen berechnen (5)

Wir haben:

$$\exists\, left', right' : TEXT \bullet$$
$$ch? \in printing \land \#(left' \frown right') \leq maxsize \land$$
$$left' = left \frown \langle ch? \rangle \land right' = right$$







Vorbedingungen berechnen (5)

Wir haben:

$$\exists\, left', right' : TEXT \bullet$$
$$ch? \in printing \land \#(left' \frown right') \leq maxsize \land$$
$$left' = left \frown \langle ch? \rangle \land right' = right$$

Wir entfernen den Existenzquantor mit der *Ein-Punkt-Regel*

$$(\exists\, x : T \bullet x = e \land p) \Leftrightarrow p[e/x]$$

($p[e/x]$: Ersetzen von e durch x in p)

Vorbedingungen berechnen (5)

Wir haben:

$$\exists\, left', right' : TEXT \bullet$$
$$ch? \in printing \land \#(left' \frown right') \leq maxsize \land$$
$$left' = left \frown \langle ch? \rangle \land right' = right$$

Wir entfernen den Existenzquantor mit der *Ein-Punkt-Regel*

$$(\exists\, x : T \bullet x = e \land p) \Leftrightarrow p[e/x]$$

($p[e/x]$: Ersetzen von e durch x in p)
und erhalten

$$ch? \in printing \land \#(left \frown \langle ch? \rangle \frown right) \leq maxsize$$

wobei wir $left' = left \frown \langle ch? \rangle$ und $right' = right$ angewandt haben.

Vorbedingungen berechnen (6)

Alles zusammen ($pr \equiv ch? \in printing$):

$\exists\, Editor' \bullet Insert$ [Definition der Vorbedingung]







Vorbedingungen berechnen (6)

Alles zusammen ($pr \equiv ch? \in printing$):

$\exists\, Editor' \bullet Insert$ [Definition der Vorbedingung]

$\Leftrightarrow\ left', right' : TEXT \mid \ldots \bullet \ldots$ [Schemata expandieren]

Vorbedingungen berechnen (6)

Alles zusammen ($pr \equiv ch? \in printing$):

$$\exists\, Editor' \bullet Insert \qquad \text{[Definition der Vorbedingung]}$$
$$\Leftrightarrow left', right' : TEXT \mid \ldots \bullet \ldots \qquad \text{[Schemata expandieren]}$$
$$\Leftrightarrow left', right' : TEXT \bullet \ldots \wedge \ldots \qquad \text{[Eingeschränktes } \exists\text{]}$$

Vorbedingungen berechnen (6)

Alles zusammen ($pr \equiv ch? \in printing$):

$$
\begin{array}{lll}
\exists\, Editor' \bullet Insert & & \text{[Definition der Vorbedingung]} \\
\quad \Leftrightarrow left', right' : TEXT \mid \ldots \bullet \ldots & & \text{[Schemata expandieren]} \\
\quad \Leftrightarrow left', right' : TEXT \bullet \ldots \land \ldots & & \text{[Eingeschränktes } \exists\text{]} \\
\quad \Leftrightarrow pr \land \#(left \frown \langle ch? \rangle \frown right) \leq maxsize & & \text{[Ein-Punkt-Regel]}
\end{array}
$$

Vorbedingungen berechnen (6)

Alles zusammen ($pr \equiv ch? \in printing$):

$$
\begin{aligned}
&\exists\, Editor' \bullet Insert && \text{[Definition der Vorbedingung]}\\
&\quad \Leftrightarrow left', right' : TEXT \mid \ldots \bullet \ldots && \text{[Schemata expandieren]}\\
&\quad \Leftrightarrow left', right' : TEXT \bullet \ldots \wedge \ldots && \text{[Eingeschränktes } \exists\text{]}\\
&\quad \Leftrightarrow pr \wedge \#(left \frown \langle ch? \rangle \frown right) \leq maxsize && \text{[Ein-Punkt-Regel]}\\
&\quad \Leftrightarrow pr \wedge \#left + \#\langle ch? \rangle + \#right \leq maxsize && [\#(s \frown t) = \#s + \#t]
\end{aligned}
$$

Vorbedingungen berechnen (6)

Alles zusammen ($pr \equiv ch? \in printing$):

$$
\begin{aligned}
&\exists\, Editor' \bullet Insert && \text{[Definition der Vorbedingung]}\\
&\quad \Leftrightarrow left', right' : TEXT \mid \ldots \bullet \ldots && \text{[Schemata expandieren]}\\
&\quad \Leftrightarrow left', right' : TEXT \bullet \ldots \wedge \ldots && \text{[Eingeschränktes } \exists\text{]}\\
&\quad \Leftrightarrow pr \wedge \#(left \frown \langle ch? \rangle \frown right) \leq maxsize && \text{[Ein-Punkt-Regel]}\\
&\quad \Leftrightarrow pr \wedge \#left + \#\langle ch? \rangle + \#right \leq maxsize && [\#(s \frown t) = \#s + \#t]\\
&\quad \Leftrightarrow pr \wedge \#left + 1 + \#right \leq maxsize && [\#\langle x \rangle = 1]
\end{aligned}
$$

Vorbedingungen berechnen (6)

Alles zusammen ($pr \equiv ch? \in printing$):

$$
\begin{aligned}
&\exists\, Editor' \bullet Insert && \text{[Definition der Vorbedingung]}\\
&\quad \Leftrightarrow left', right' : TEXT \mid \ldots \bullet \ldots && \text{[Schemata expandieren]}\\
&\quad \Leftrightarrow left', right' : TEXT \bullet \ldots \land \ldots && \text{[Eingeschränktes } \exists\text{]}\\
&\quad \Leftrightarrow pr \land \#(left \frown \langle ch? \rangle \frown right) \leq maxsize && \text{[Ein-Punkt-Regel]}\\
&\quad \Leftrightarrow pr \land \#left + \#\langle ch? \rangle + \#right \leq maxsize && [\#(s \frown t) = \#s + \#t]\\
&\quad \Leftrightarrow pr \land \#left + 1 + \#right \leq maxsize && [\#\langle x \rangle = 1]\\
&\quad \Leftrightarrow pr \land \#left + \#right < maxsize && \text{[Arithmetik]}
\end{aligned}
$$

Komplette Vorbedingung:

$$ch? \in printing \land \#left + \#right < maxsize$$

Fallstudie: Expertensystem

Fakten und Regeln:

$[FACT]$

> $stripes, fur, zebra, sharp\_teeth, carnivore,$
> $herbivore, mammal, tiger : FACT$







Fallstudie: Expertensystem

Fakten und Regeln:

$$[FACT]$$

$$stripes, fur, zebra, sharp\_teeth, carnivore, herbivore, mammal, tiger : FACT$$

$$rules : \mathbb{P}\, FACT \leftrightarrow FACT$$

$$
\begin{aligned}
rules = \{ & \\
& \vdots \\
& \{fur\} \mapsto mammal, \\
& \{sharp\_teeth\} \mapsto carnivore, \\
& \{stripes, mammal, carnivore\} \mapsto tiger, \\
& \{stripes, mammal, herbivore\} \mapsto zebra, \\
& \vdots \\
& \}
\end{aligned}
$$

Fallstudie: Expertensystem (2)

Monotones Schließen – Fakten werden zur Faktenbasis hinzugefügt

$$deduce == (\lambda\, facts : \mathbb{P}\, FACT \bullet facts \cup rules(\!|\, \mathbb{P}\, facts \,|\!))$$

Beispiel:

$$facts = \{stripes, sharp\_teeth, fur\}$$
$$deduce(facts) = \{stripes, sharp\_teeth, fur, mammal, carnivore\}$$
$$deduce(deduce(facts)) = \{stripes, sharp\_teeth, fur, mammal, carnivore, tiger\}$$

Fallstudie: Expertensystem (2)

Monotones Schließen – Fakten werden zur Faktenbasis hinzugefügt

$$deduce == (\lambda\, facts : \mathbb{P}\, FACT \bullet facts \cup rules(\!|\, \mathbb{P}\, facts \,|\!))$$

Beispiel:

$$facts = \{stripes, sharp\_teeth, fur\}$$
$$deduce(facts) = \{stripes, sharp\_teeth, fur, mammal, carnivore\}$$
$$deduce(deduce(facts)) = \{stripes, sharp\_teeth, fur, mammal, carnivore, tiger\}$$

Fallstudie: Expertensystem (3)

Transitiver Abschluß ($^+$) – Funktion wird angewandt, bis Fixpunkt erreicht

$$complete == deduce^+$$

so daß

$$\begin{aligned} &complete(facts) \\ &\quad = deduce(\ldots deduce(facts)\ldots) \\ &\quad = \{stripes, sharp\_teeth, fur, mammal, \\ &\quad carnivore, tiger\} \end{aligned}$$







Fallstudie: Expertensystem (4)

Wir sorgen für konsistente Regeln, indem wir *sich ausschließende Fakten* definieren:

$$
\begin{aligned}
&\mathit{inconsistent} == \{\\
&\quad \vdots\\
&\quad \{\mathit{fur}, \mathit{feathers}, \mathit{scales}, \ldots\}\\
&\quad \{\mathit{mammal}, \mathit{bird}, \mathit{fish}, \ldots\}\\
&\quad \{\mathit{tiger}, \mathit{zebra}, \mathit{ostrich}, \mathit{goldfish}, \ldots\}\\
&\quad \vdots\\
&\quad \}
\end{aligned}
$$







Fallstudie: Expertensystem (5)

Konsistente Fakten enthalten maximal ein Element jeder Menge:

$$
\begin{array}{|l}
\mathit{consistent} : \mathbb{P}(\mathbb{P}\, \mathit{FACT}) \\
\hline
\forall\, \mathit{facts} : \mathit{consistent};\ \mathit{mutually\_exclusive} : \mathit{inconsistent} \bullet \\
\quad \#(\mathit{mutually\_exclusive} \cap \mathit{facts}) \leq 1
\end{array}
$$

Hiermit schränken wir *complete* ein:

$$\forall\, \mathit{facts} : \mathit{consistent} \bullet \mathit{complete}(\mathit{facts}) \in \mathit{consistent}$$

Anders: *Aus einer konsistenten Menge von Fakten können wir nur konsistente Fakten schließen.*







Fallstudie: Expertensystem (6)

Herzstück des Schließens ist das *Deduce*-Schema:

Deduce

$$
\begin{array}{l}
facts, facts' : \mathbb{P}\, FACT \\
data, goals, conclusions! : \mathbb{P}\, FACT \\
\hline
(\textbf{let}\ all == complete(facts \cup data) \bullet \\
\quad facts \subseteq facts' \subseteq all \land \\
\quad conclusions! = (goals \cap all) \subseteq facts')
\end{array}
$$

facts, *facts′*: Fakten (vorher und nachher)
data: Neue Fakten
goals: Menge der Ziele
conclusions!: Folgerungen (Ausgabe)

Fallstudie: Expertensystem (7)

Vorwärts-Schließen = Folgerungen aus Beobachtungen ableiten

Deduce

$$facts, facts' : \mathbb{P}\, FACT$$
$$data, goals, conclusions! : \mathbb{P}\, FACT$$

$$(\textbf{let}\ all == complete(facts \cup data) \bullet$$
$$facts \subseteq facts' \subseteq all \land$$
$$conclusions! = (goals \cap all) \subseteq facts')$$

Forward

$$Deduce$$
$$observations? : \mathbb{P}\, FACT$$

$$data = observations?$$

$$observations? = \{stripes, sharp\_teeth, fur\} \land$$
$$goals = \{zebra, tiger, ostrich \ldots\}$$







Fallstudie: Expertensystem (7)

Vorwärts-Schließen = Folgerungen aus Beobachtungen ableiten

Deduce

$$facts, facts' : \mathbb{P}\, FACT$$
$$data, goals, conclusions! : \mathbb{P}\, FACT$$

$$(\textbf{let}\ all == complete(facts \cup data) \bullet$$
$$facts \subseteq facts' \subseteq all \land$$
$$conclusions! = (goals \cap all) \subseteq facts')$$

Forward

$$Deduce$$
$$observations? : \mathbb{P}\, FACT$$

$$data = observations?$$

$$observations? = \{stripes, sharp\_teeth, fur\} \land$$
$$goals = \{zebra, tiger, ostrich \ldots\} \Rightarrow conclusions! = \{tiger\}$$

Fallstudie: Expertensystem (8)

Rückwärts-Schließen = Welche Anfragen passen zu den Fakten?

Deduce

$$facts, facts' : \mathbb{P}\, FACT$$
$$data, goals, conclusions! : \mathbb{P}\, FACT$$

$$(\textbf{let}\ all == complete(facts \cup data) \bullet$$
$$facts \subseteq facts' \subseteq all \land$$
$$conclusions! = (goals \cap all) \subseteq facts')$$

Backward

Deduce

$$queries? : \mathbb{P}\, FACT$$

$$goals = queries?$$

$$queries? = \{tiger, zebra\} \land data = \varnothing$$

Fallstudie: Expertensystem (8)

Rückwärts-Schließen = Welche Anfragen passen zu den Fakten?

Deduce

$$facts, facts' : \mathbb{P}\, FACT$$
$$data, goals, conclusions! : \mathbb{P}\, FACT$$

$$(\textbf{let}\ all == complete(facts \cup data) \bullet$$
$$facts \subseteq facts' \subseteq all \land$$
$$conclusions! = (goals \cap all) \subseteq facts')$$

Backward

Deduce

$$queries? : \mathbb{P}\, FACT$$

$$goals = queries?$$

$$queries? = \{tiger, zebra\} \land data = \varnothing \Rightarrow conclusions! = \{tiger\}$$

Fallstudie: Expertensystem (9)

Das *Deduce*-Schema suggeriert eine naive Implementierung:

1. *Alle* möglichen Fakten generieren (*all*)
2. Alle Fakten bestimmen, die auch in *goal* auftreten,
3. und als *Folgerungen* (*conclusions*!) zurückgeben

Eine tatsächliche Implementierung muß aber nicht so vorgehen (und sollte es auch nicht):

Die Spezifikation beschreibt nur die Wirkung,
nicht das Vorgehen

Alternative: *Ausführbare Spezifikation* (langsam, aber nützlich – für Prototypen oder Orakel)

Zusammenfassung

- In Z wird das Verhalten eines Systems durch *Schemata* beschrieben
- Ein Schema beschreibt einen Aspekt des spezifizierten Systems
- Das Schema-Kalkül ermöglicht Einschließen, Konjunktion und Disjunktion von Schemata
- Schemas sind gute Grundlage für Programmbeweise







Literatur

The Way of Z (Jonathan Jacky) – alle hier beschriebenen Beispiele und Tutorials

The Z Notation (http://www.comlab.ox.ac.uk/archive/z.html) – Die Z-Notation

The Z Glossary (ftp://ftp.comlab.ox.ac.uk/pub/Zforum/zglossary.ps.Z) – Z-Glossar

Fuzz Type Checker (http://spivey.oriel.ox.ac.uk/mike/fuzz/) – Typprüfer und LaTeX-Makros für Linux